数理解析研究所講究録
111巻 1971年 82-102

K_2 と Symbols について

東京教育大理　阿部英一

Milnor によって定義された K_2-関手は、もとをたどれば、Steinberg による体の上の単純代数群の Schur の乗法因子の研究にあらわれている。これらは、数論的な意味をもつ Symbol と対応する構造をもち、Moore, Matsumoto は、これを応用して、Chevalley 型の rank > 1 の単純代数群の合同部分群の問題を解いている。ある種の代数群の帰納的極限群をとることにより、我々の議論に必要な性質が一般の可換環の上でみたされる群がえられ、自然に環の上での Symbol が定義される。こゝでは、これらのことを解説することを目標とし、最後に R. Stein の最近の局所環上の結果を紹介する。しかし、簡単のために、群は Milnor の定義につかわれた、GL_{n+1}（または SL_{n+1}）にかぎることにする。高次の K-関手については、種々の定義があり、それらの間の関係や、環上の Symbol などが、何らかの新しい情報をあたえる

かどうかは、これからの問題であろう。数体上の Symbol については Bass, Tate などによって、詳わしい研究がなされており、近かく発表されるものと思われる。

環 R は可換で単位元をもつものとし、R の単元のつくる乗法に関する群を R^* とかく。環の準同型は単位元と単位元にうつすものとする。

§1. Symbols

(1.1) 定義 可換群 $R^* \times R^*$ から可換群 C の中への写像

$$(\ , \ ) : R^* \times R^* \longrightarrow C$$

が次の条件をみたすとき、$(\ , \ )$ を C に値をもつ R 上の Symbol という。a, b, c を R^* の元とするとき、

(S1) $(ab, c) = (a, c)\cdot(b, c)$, $(a, b\cdot c) = (a, b)\cdot(a, c)$

(S2) $a, 1-a \in R^*$ のとき、$(a, 1-a) = 1$

(S3) $(a, -a) = 1$

(1.2) 性質 (1) $(a, b) = (b, a)^{-1}$

∵) S1, S3 から、$1 = (ab, -ab) = (a, -a)(a, b)(b, a)(b, -b)$

(2) $(1, b) = (a, 1) = 1$, $(a, b)(ab, c) = (a, bc)(b, c)$

(正規化された 2-コサイクルの条件)

(3) R が体ならば、S1, S2 ⇒ S3 ∵) $a=1$ なら明らか、

$a \neq 1$ のとき $1 = (a^{-1}, 1-a^{-1}) = (a^{-1}, a^{-1}(a-1)) = (a^{-1}, 1-a)(a^{-1}, -a^{-1})$
$= (a, 1-a)(a^{-1}, -a^{-1}) = (a^{-1}, -a^{-1})$.

§1

(4) $(a,b)=(a,-ab)=(-ab,b)=(-ab^{-1},b)=(-ab^{-1},a)$

(1.3) 例 (1) Tame-symbol　vを体F上の離散付値とし、$\mathcal{O}(v)$をその整数環，$\mathfrak{p}(v)$を$\mathcal{O}(v)$の極大イデアル，$k(v)=\mathcal{O}(v)/\mathfrak{p}(v)$とする。$a,b\in F^*$のとき、

$$(a,b)_v\equiv(-1)^{v(a)v(b)}a^{v(b)}b^{-v(a)}\pmod{\mathfrak{p}(v)}$$

とおくと、$(\ ,\ )_v$ は $k(v)^*$に値をもつF上のSymbol.

(2) Real-symbol　Rを実数体とし、$a,b\in R^*$のとき、

$$\begin{aligned}(a,b)_\infty&=-1 &&(\ a,b<0\text{ のとき })\\ &=1 &&(\text{ そうでないとき })\end{aligned}$$

とおくと、$(\ ,\ )_\infty$ は $\mu_\infty=\{\pm1\}$に値をもつR^*上のSymbol.

(3) Hilbert-symbol　Fをglobal field（有理数体$\mathbb{Q}$または有限体上の一変数有理関数体$F_q(t)$の有限次拡大体）とし、vをFのplace，F_vをvに関するFの完備化とする。vがcomplexのとき、$\mu_v=1$，vがcomplexでないとき、$\mu_v=\mu(F_v)$をF_vの中の1の巾根のつくる群とする。HilbertのSymbol $\left(\frac{\ ,\ }{v}\right)$は$\mu_v$に値をもつ$F_v^*$上のSymbolで、$v$がcomplexのとき自明，$v$がrealのとき、real-symbol，$v$がfinite placeで$k(v)$の標数が$\mu_v$の次数を割らないとき、Tame-symbolと同一視できる。

(4) m-symbol　Fを体とし、F_sをFの分離代数的閉包とし、そのガロア群をG_Fとする。μ_mを1のm-巾根のつく

る群とすると、完全系列

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow F_s^* \xrightarrow{m} F_s^* \longrightarrow 1 \qquad (m : x \longmapsto x^m)$$

に対して、$F^* = H^0(G_F, F_s^*) \xrightarrow{\delta_m} H^1(G_F, \mu_m)$ がつくれる.

$$(a, b) = \delta_m a \vee \delta_m b$$

は $H^2(G_F, \mu_m \otimes \mu_m)$ に値をもつ、F 上の *symbol*.

(5) <u>*Differential-symbol*</u> F を体とし、$a, b \in F^*$ のとき、

$$(a, b)_{diff.} = \frac{da}{a} \wedge \frac{db}{b}$$

は $\Lambda^2 \Omega_F$ に値をもつ F 上の *symbol*.

(6) <u>*Universal-symbol*</u> S を (a, b), $a \in R^*$, $b \in R^*$ から生成される自由可換群とし、T を $(ab, c)(a, c)^{-1}(b, c)^{-1}$, $(a, bc)(a, b)^{-1}(a, c)^{-1}$ $(a, b, c \in R^*)$, $(a, 1-a)$ $(a \in R^*, 1-a \in R^*)$, $(a, -a)$ $(a \in R^*)$ から生成される S の部分群とする. 自然な写像 $R^* \times R^* \longrightarrow S/T = \mathrm{Sym}(R)$ は *symbol* であり、可換群 C に値をもつ R 上の *symbol* をあたえることと、準同型 $\mathrm{Sym}(R) \longrightarrow C$ をあたえることとは同値である。

(1.4) Hilbert-symbol は局所コンパクト可換群に値をもつ F_v 上の<u>連続な</u> symbols に関して普遍的である. (cf. C. Moore [5], J. Tate がより簡単な別証をあたえている由である。)

Sym(F) が Milnor のいみの $K_2(F)$ と一致することを示すのがこの小論の主な目標である. Bass, Tate, Milnor などは、$K_2(F)$ を Sym(F) で定義して、その性質を研究している.

§2. 群の中心拡大と被覆群

(2.1) K_2 の定義に使われる Steinberg 群の意味をわかり易くするために、まず、群の被覆について解説する. (cf. C. Moore [5], R. Stein [8]) 群 G の元 a, b に対して、$[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$ とかき、$H, K \subset G$ に対して、$[H,K]$ を $[a,b]$, $a\in H$, $b \in K$, から生成される G の部分群とする.

G を群とし、$\pi_0(G) = G/[G,G] = \{1\}$ のとき、G を連結であるという. G の中心拡大

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

で E が連結のとき、(E,p) を G の被覆群という. G が連結で、G のすべての被覆群が同型のとき、G を単連結であるという. G の 2つの被覆群 (E_1, p_1), (E_2, p_2) に対して、準同型 h: $E_1 \longrightarrow E_2$ で $p_2 \circ h = p_1$ をみたすものが存在するとき、E_1 は E_2 を支配するという. G の被覆群で、他のすべての被覆群を支配するものを G の普遍被覆群という. G の普遍被覆群は存在すれば同型を除いて一意的にきまる. それを $(\hat{G}, p)$ とするとき、$\mathrm{Ker}\, p = \pi_1(G)$ を G の基本群という.

(2.2) 定理 群 G が連結ならば、その普遍被覆群が存在する. 普遍被覆群は単連結で、G が単連結であるためには、$\pi_1(G)=1$ であることが必要充分である.

(証明 cf. R. Stein [8]) $G \simeq F/R$, F: 自由群, としたと

き、$\hat{G} = [F,F]/[F,R]$ が G の普遍被群になる。

(2.3) 定理　G を連結群,$(\hat{G}, p)$ をその被覆群とする. 次の條件は、互に同値である.

(a) $\hat{G}$ は単連結である. ($\Leftrightarrow$ 普遍被覆群である. cf (2.2))

(b) $\hat{G}$ の任意の中心拡大は一意的に分解する.

(c) $p_1 : H_1 \longrightarrow H$ を任意の上への群の準同型で $\mathrm{Ker}\, p_1$ は H_1 の中心に含まれるとする. 任意の準同型 $\tau : G \longrightarrow H$ に対して、準同型 $\bar{\tau} : \hat{G} \longrightarrow H_1$ で、$\tau \circ p = p_1 \circ \bar{\tau}$ をみたすものが存在する.

(証明 cf. R. Stein [8]) (c)でとくに、$p_1 : GL_n(k) \to PGL_n(k)$ (kは体, 自然な準同型) とすると、G の任意の射影表現は、$\hat{G}$ の通常表現からひきおこされる. $\mathrm{Ker}\, p$ は G の乗法因子群と呼ばれている.

(2.4) 系 (1) G 連結のとき、G 単連結 $\Leftrightarrow$ 任意の自明な G-加群 A に対して、$H^1(G, A) = 0$ かつ $H^2(G, A) = 0$

(2) G 連結のとき. $H^2(G, A) \approx \mathrm{Hom}(\pi_1(G), A)$
(Aは(1)と同じ)

(2.5) 定理 (1) G 連結 $\Leftrightarrow H_1(G, \mathbb{Z}) = 0$

(2) G 連結のとき、$\pi_1(G) \approx H_2(G, \mathbb{Z})$

とくに G 単連結 $\Leftrightarrow H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$

(証明) (1) $H_1(G, \mathbb{Z}) = \pi_0(G)$ から明らか.

(2) 普遍係数定理から、$H^n(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_n(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$(n \geqq 1)$. $\hat{G}$が単連結なら、(2.3)(b)から、$H^2(\hat{G}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ 従って $H_2(\hat{G}, \mathbb{Z}) = 0$. Gを連結, $\hat{G}$をその普遍被覆群とするとき、Hochschild-Serre[6]のスペクトル系列から、

$$H_2(\hat{G}, \mathbb{Z}) \to H_2(G, \mathbb{Z}) \to H_0(G, H_1(\pi_1(G), \mathbb{Z})) \to H_1(\hat{G}, \mathbb{Z})$$

$H_2(\hat{G}, \mathbb{Z}) = 0$, $H_1(\hat{G}, \mathbb{Z}) = 0$, $H_0(G, H_1(\pi_1(G), \mathbb{Z})) \cong \pi_1(G)$ から (3) がえられる.

(2.6) 局所体上の群や、アデール環上の群を考察するときには、(2.1)と同じような議論を、Gを局所コンパクト群, 準同型を連続としてする必要がある、被覆群の定義で、$[E, E]$がEの中で稠密のとき、Eを連結であると定義すると、Gがコンパクト群で、群として、$[G, G] = G$ ならば単連結被覆群の存在が知られているが、それが普遍被覆群になるかどうかはわからない. しかし、Gが連結リー群ならば、(2.1)の意味での普遍被覆群でかつ単連結なものが存在し、連結リー群になっている、とくに、Gが半単純ならば、位相的な普遍被覆群と一致し、Gの基本群は位相的に定義されたものと同じになる. (cf. A. Shapiro[7]).

(2.7) <u>定義</u> Gを連結群, Hを連結なGの部分群とする. $H \overset{i}{\hookrightarrow} G$ は自然に、準同型 $i^*: \pi_1(H) \longrightarrow \pi_1(G)$ をひきおこす. $\pi_1(G, H) = \mathrm{Coker}\, i^*$ を GのHに関する<u>相対基本群</u>という. Gの被覆群(E, p)がHに制限したとき分解するものの

中で普遍的ならば、$\mathrm{Ker}\,p$ が $\pi_1(G,H)$ と同型である.（これは、位相群の均質空間の基本群の定義の類似になっている.）

A を自明な G-加群とすると、(2.4) (2) に対応して、

$$\mathrm{Ker}(H^2(G,A) \to H^2(H,A)) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(G,H), A)$$

§3. 関手 K_1, K_2 の定義

(3.1) $GL_n(R)$ を R の元を係数とする n 次の正方行列で、行列式が R^* の元になるものの全体のつくる群, $E_n(R)$ を $x_{ij}(t) = I + te_{ij}$, $t \in R$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ (e_{ij} は (i,j)-成分が 1, 他の成分はすべて零になる行列）から生成される $GL_n(R)$ の部分群とする. $GL_n(R)$ から $GL_{n+1}(R)$ の中への準同型

$$\alpha \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in GL_n(R)$$

に関して、帰納的極限群をとり、$\varinjlim_n GL_n(R) = GL(R)$, $\varinjlim_n E_n(R) = E(R)$ とおく.

(3.2) <u>補題</u>　$E(R) = [GL(R), GL(R)]$, $E(R)$ は連結.

とくに R が体ならば、$n \geq 3$ のとき、$E_n(R) = SL_n(R) = [GL_n(R), GL_n(R)]$, $E_n(R)$ は連結.

$n \geq 3$ ならば $[x_{ij}(t), x_{jk}(1)] = x_{ik}(t)$ から $E_n(R)$ は連結.

Whitehead の補題から $[GL_n(R), GL_n(R)] \subset E_{2n}(R)$.

(3.3) $K_1(R) = H_1(GL(R), \mathbb{Z})$, $K_2(R) = H_2(E(R), \mathbb{Z})$

と定義する.

$K_1(R)=\pi_1(GL(R))=GL(R)/E(R)$ (cf.(3.2)). $E(R)$は連結だから普遍被覆群$\hat{E}(R)$をもち(2.2)，$K_2(R)=\pi_1(E(R))$ (2.5).
従って、次のような完全系列がえられる.

$$1\longrightarrow K_2(R)\longrightarrow \hat{E}(R)\longrightarrow GL(R)\longrightarrow K_1(R)\longrightarrow 1$$

(3.4) 注意 Swan[10]は、$K_n(R)$ $(n\geqq 1)$を次のように定義することを提案している. Gを $H_i(G,\mathbb{Z})=0$ $(1\leqq i\leqq n-1)$をみたす群で、準同型$G\longrightarrow GL(R)$に関して普遍的なものとするとき、$K_n(R)=H_n(G,\mathbb{Z})$とおく. この方法で、K_1, K_2は(3.3)，$K_3(R)=H_3(\hat{E}(R),\mathbb{Z})$となるが. 一般に、このような群$G$が存在するかどうかはよくわからない. なお、Swan[11]は別の方法でK_nを一般的に定義しているが、そこでは、K_1は(3.3)と一致し、K_2は次の(3.5)が成立すれば(3.3)と一致する.

(3.5) $R^{(n)}$を不定元$x_1,\cdots,x_n$から生成される単位元をもつ自由環(不定元は互に非可換)とするとき、$K_2(R^{(n)})=0$ $(\forall n)$.
(こゝで、K_2は(3.3)の定義によるもの).

(3.6) 相対的なK-関手を次のように定義する. $\mathfrak{a}$をRのイデアルとするとき、$GL(R,\mathfrak{a})=\mathrm{Ker}(GL(R)\to GL(R/\mathfrak{a}))$，
$E(R,\mathfrak{a})=\mathrm{Ker}(E(R)\to E(R/\mathfrak{a}))$，$\hat{E}(R,\mathfrak{a})=\mathrm{Ker}(\hat{E}(R)\to \hat{E}(R/\mathfrak{a}))$
とおき、$K_1(R,\mathfrak{a})=\mathrm{Coker}(\hat{E}(R,\mathfrak{a})\to GL(R,\mathfrak{a}))$

$K_2(R,\mathfrak{a})=\mathrm{Ker}(\hat{E}(R,\mathfrak{a})\longrightarrow GL(R,\mathfrak{a}))$ とおく.

このとき、 $K_1(R,\mathfrak{a})$, $K_2(R,\mathfrak{a})$ はともに可換群になり、

$$1 \to K_2(R,\mathfrak{a}) \to K_2(R) \to K_2(R/\mathfrak{a}) \to K_1(R,\mathfrak{a}) \to K_1(R) \to K_1(R/\mathfrak{a})$$

は完全系列になる.

§4. Steinberg 群

この節では、$E(R)$ の普遍被覆群 $\hat{E}(R)$ を実際に構成し、その構造を調べることを目標にする.

(4.1) $E_n(R)$ の生成元については、次の関係がある.

$$
\begin{aligned}
[x_{ij}(s), x_{kl}(t)] &= x_{il}(st) \quad (j=k,\ i\neq l)\\
&= 1 \quad (j\neq k,\ i\neq l)\\
&= x_{kj}(-st) \quad (j\neq k,\ i=l)
\end{aligned}
$$

$GL_n(R)$ の対角行列の全体のつくる群を $T_n(R)$, $T_n(R)$ の $GL_n(R)$ での正規化群を $N_n(R)$ とおくと、$T_n(R)$ は可換群で $N_n(R)/T_n(R) \cong \mathfrak{S}_n$ (n 次の対称群) となる.

$$U_n(R) = \langle x_{ij}(s)\ ;\ 1\leq i<j\leq n,\ s\in R \rangle$$

$$V_n(R) = \langle x_{ij}(s)\ ;\ 1\leq j<i\leq n,\ s\in R \rangle$$

とおくと、

$$U_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(R) \right\},\quad V_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(R) \right\}$$

となり、これらは、$GL_n(R)$ の巾零部分群で

$$B_n(R) = T_n(R)\cdot U_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in GL_n(R) \right\} \text{(半直積)}$$

は $GL_n(R)$ の可解部分群である. とくに、R が体ならば、

$E_n(R)=SL_n(R)$ $(n\geqq 3)$ で $GL_n(R)=U_n(R)N_n(R)U_n(R)$ とあらわせる.（Bruaht 分解）

(4.2) <u>定義</u> $n\geqq 3$ のとき、$\hat{x}_{ij}(t)$, $1\leqq i,j\leqq n$, $i\neq j$, $t\in R$ から生成され、次の関係で定義される群を n 次の Steinberg 群といい、$ST_n(R)$ とかく.

(A) $\hat{x}_{ij}(s)\,\hat{x}_{ij}(t)=\hat{x}_{ij}(s+t)$

(B) $$[\hat{x}_{ij}(s),\ \hat{x}_{kl}(t)]=\begin{cases}1 & (i\neq l,\ j\neq k)\\ \hat{x}_{il}(st) & (i\neq l,\ j=k)\end{cases}$$

$ST_n(R)$ は自然に $ST_{n+1}(R)$ の中への準同型をもち、これに関する帰納的極限群 $\varinjlim_{n} ST_n(R)=ST(R)$ を単に Steinberg 群という.（注意：$ST_n(R)\to ST(R)$ が単射準同型かどうかはわからない）(4.1) から p: $\hat{x}_{ij}(t)\longmapsto x_{ij}(t)$ は $ST_n(R)$ から $E_n(R)$ および $ST(R)$ から $E(R)$ の上への準同型を定義する.

(4.3) <u>定理</u> $(ST(R), p)$ は $E(R)$ の普遍被覆群である. とくに R が体のときは、$n>4$ ならば、$(ST_n(R), p)$ は $SL_n(R)$ の普遍被覆群である.

（証明 cf. Swan [10], Steinberg [9]） $n>4$ ならば、一般に $ST_n(R)$ が単連結であることが示される.（Swan の証明を参照）が中心拡大であるとは限らない. R が体で $n=3, 4$ のときは、体の元の個数 >4 ならば $ST_n(R)$ が $SL_n(R)$ の普遍被覆群であることが知られている.

注意. あとで示すように、Rが体のとき、$SL_n(R)$ $(n \geq 3)$ の基本群は、nに関係なく、同型で、K_2-関手は、帰納的極限群でなく、有限の $n > 4$ に対して、$SL_n(R)$ で定義してよい。

(4.4) 生成元の間の関係　$t \in R^*$ のとき、

(4.4.1) $\hat{w}_{ij}(t) = \hat{x}_{ij}(t)\,\hat{x}_{ji}(-t^{-1})\,\hat{x}_{ij}(t)$

(4.4.2) $\hat{h}_{ij}(t) = \hat{w}_{ij}(t)\,\hat{w}_{ij}(-1)$

とおくと、$\hat{w}_{ij}(t)$, $\hat{h}_{ij}(t)$ は p でそれぞれ、$N(R)$, $T(R)$ の中に写像され、次のような関係が成立する。

(4.4.3) $\hat{w}_{ij}(t)^{-1} = \hat{w}_{ij}(-t)$, $\quad \hat{w}_{ij}(t) = \hat{w}_{ji}(-t^{-1})$

(4.4.4) $\hat{h}_{ij}(t)^{-1} = \hat{h}_{ji}(t)$, $\quad \hat{w}_{ij}(-1)^2 = \hat{h}_{ij}(-1)$

(4.4.5) $\hat{w}_{ij}(t)\,\hat{x}_{jk}(u)\,\hat{w}_{ij}(t)^{-1} = \hat{x}_{ik}(-tu)$

(4.4.6) $\hat{w}_{ij}(t)\,\hat{x}_{ik}(u)\,\hat{w}_{ij}(t)^{-1} = \hat{x}_{jk}(-t^{-1}u)$

(4.4.7) $\hat{w}_{ij}(t)\,\hat{x}_{kj}(u)\,\hat{w}_{ij}(t)^{-1} = \hat{x}_{ki}(t^{-1}u)$

(4.4.8) $\hat{w}_{ij}(t)\,\hat{x}_{ki}(u)\,\hat{w}_{ij}(t)^{-1} = \hat{x}_{kj}(tu)$

(4.4.9) $\hat{w}_{ij}(t)\,\hat{x}_{ij}(u)\,\hat{w}_{ij}(t)^{-1} = \hat{x}_{ji}(-t^{-2}u)$

(4.5) 注意　$n=2$ のとき、$\hat{x}_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq 2$, $i \neq j$, $t \in R$ から生成され、関係 (A) と (4.4.9) とで定義される群を $ST_2(R)$ とおくと、Rが体のとき、Rの元の個数 $> 4, \neq 9$ ならば $ST_2(R)$ は $SL_2(R)$ の普遍被覆群になる。

(cf. R. Steinberg [9])

(4.6) 注意　単純代数群 $SL_n(F)$ （F は代数的閉体）の root 系を使うと、(4.5) の生成元の間の関係の表示が簡易化できることを示そう。$h = \mathrm{diag}(\lambda_1(h), \cdots, \lambda_n(h)) \in SL_n(F) \cap T(F) = T_n'$ とすると、T_n' の指標群 $X(T_n')$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ から生成される.

$$h\, x_{ij}(t)\, h^{-1} = x_{ij}(\lambda_i(h)\lambda_j(h)^{-1} t) \qquad t \in R$$

をみたしている. $X(T_n')$ の積を加法でかいて、

$$\Phi = \{ \lambda_i - \lambda_j \in X(T_n'),\ 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j \}$$

を $SL_n(F)$ の root 系という. $X(T_n') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ には、$\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle = \delta_{ij}$ として内積が定義されている. $\alpha = \lambda_i - \lambda_j \in \Phi$ に対して、$\hat{x}_{ij}(t)$, $\hat{w}_{ij}(t)$, $\hat{h}_{ij}(t)$ などを $\hat{x}_\alpha(t)$, $\hat{w}_\alpha(t)$, $\hat{h}_\alpha(t)$ などとかく. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、$\sigma(\lambda_i - \lambda_j) = \lambda_{\sigma(i)} - \lambda_{\sigma(j)}$ として、$\mathfrak{S}_n$ は Φ に作用している. $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$ のとき、互換 (ij) の Φ 上の作用を σ_α とかく. このとき、(4.4.6)〜(4.4.9) は次の1つの式であらわすことができる.

(4.6.1)
$$\hat{w}_\alpha(t)\, \hat{x}_\beta(u)\, \hat{w}_\alpha(t)^{-1} = \hat{x}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta t^{-\langle \alpha, \beta \rangle} u)$$

ここで、$\eta = \eta(\alpha, \beta) = \pm 1$ で次の (1) のとき $+1$, (2) のとき -1 とする.

(1)　$\alpha \pm \beta \neq 0$, $\alpha \pm \beta \notin \Phi$ または、$\alpha \pm \beta \in \Phi$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$

　　$\alpha \pm \beta \in \Phi$, $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$ で

　　　$\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, $\beta = \lambda_k - \lambda_j$ または $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, $\beta = \lambda_k - \lambda_i$

(2)　$\alpha = \pm\beta$ または、$\alpha \pm \beta \in \Phi$, $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$ で

　　　$\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, $\beta = \lambda_j - \lambda_k$, または $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, $\beta = \lambda_i - \lambda_k$

この記法を使うと、さらに、次の関係がえられる.

(4.6.2) $\hat{w}_\alpha(t)\,\hat{w}_\beta(u)\,\hat{w}_\alpha(t)^{-1} = \hat{w}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta\, t^{-\langle\alpha,\beta\rangle} u)$

(4.6.3) $\hat{w}_\alpha(t)\,\hat{h}_\beta(u)\,\hat{w}_\alpha(t)^{-1} = \hat{h}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta\, t^{-\langle\alpha,\beta\rangle} u)\,\hat{h}_{\sigma_\alpha(\beta)}(\eta\, t^{-\langle\alpha,\beta\rangle})^{-1}$

(4.6.4) $\hat{h}_\alpha(t)\,\hat{x}_\beta(u)\,\hat{h}_\alpha(t)^{-1} = \hat{x}_\beta(t^{\langle\alpha,\beta\rangle} u)$

(4.6.5) $\hat{h}_\alpha(t)\,\hat{w}_\beta(u)\,\hat{h}_\alpha(t)^{-1} = \hat{w}_\beta(t^{\langle\alpha,\beta\rangle} u)$

(4.6.6) $\hat{h}_\alpha(t)\,\hat{h}_\beta(u)\,\hat{h}_\alpha(t)^{-1} = \hat{h}_\beta(t^{\langle\alpha,\beta\rangle} u)\,\hat{h}_\beta(t^{\langle\alpha,\beta\rangle})^{-1}$

(4.7) <u>部分群とその構造</u>　$ST_n(R)$の部分群を次のように定義する.

$$\hat{N}_\alpha(R) = \langle \hat{w}_\alpha(t),\ \alpha\in\Phi,\ t\in R^* \rangle$$

$$\hat{H}_n(R) = \langle \hat{h}_\alpha(t),\ \alpha\in\Phi,\ t\in R^* \rangle$$

$$\hat{H}_n^i(R) = \langle \hat{h}_{\alpha_i}(t),\ \alpha_i=\lambda_i-\lambda_{i+1},\ t\in R^* \rangle \quad (1\le i\le n-1)$$

$$\hat{U}_n(R) = \langle \hat{x}_\alpha(t)\ ;\ \alpha=\lambda_i-\lambda_j\ (i<j),\ t\in R \rangle$$

$$\hat{V}_n(R) = \langle \hat{x}_\alpha(t)\ ;\ \alpha=\lambda_i-\lambda_j\ (i>j),\ t\in R \rangle$$

このとき、(4.6)の関係から、

(4.7.1) $\hat{H}_n(R) \lhd \hat{N}_n(R)$, $\hat{N}_n(R)/\hat{H}_n(R) \cong \mathfrak{S}_n$

(4.7.2) $\hat{H}_n^{(i)}(R) \lhd \hat{H}_n(R)$, $\hat{H}_n(R) = \prod_{i=1}^{n-1} \hat{H}_n^{(i)}(R)$ (直積)

(4.7.3) $\hat{H}_n(R) \subset N(\hat{U}_n(R))$, $\hat{H}_n(R) \subset N(\hat{V}_n(R))$

ここで、$N(\quad)$は $ST_n(R)$での正規化群とする.

$$\hat{H}_n(R)\cap\hat{U}_n(R) = \hat{H}_n(R)\cap\hat{V}_n(R) = \hat{H}_n(R)\cdot\hat{U}_n(R)\cap\hat{V}_n(R) = 1$$

(4.7.4) Rが体ならば$(\hat{B}_n(R), \hat{N}_n(R))$は、$ST_n(R)$の BN-pairで、$ST_n(R) = \hat{U}_n(R)\hat{N}_n(R)\hat{U}_n(R)$ と分解できる.

§5. Steinberg コサイクル

(5.1) $s, t \in R^*$ のとき、$c_\alpha(s,t) = \hat{h}_\alpha(s)\hat{h}_\alpha(t)\hat{h}_\alpha(st)^{-1}$ とおく。$p(\hat{h}_\alpha(s)) = h_\alpha(s)$ は対角行列だから、$p(c_\alpha(s,t)) = 1$. 従って、$c_\alpha(s,t) \in K_2(R)$ となり、

$$c_\alpha : R^* \times R^* \longrightarrow K_2(R)$$

が定義される。このとき、

(5.2) <u>定理</u>　c_α は R の $K_2(R)$ に値をもつ Symbol で、α のとり方にかゝわらない。従って、自然な準同型 $\mathrm{Sym}(R) \longrightarrow K_2(R)$ がきまる。$c_\alpha = c$ とかき、これを Steinberg コサイクルという。

(証明) S1 の証明: $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$ をみたす root α, β (たとえば $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, $\beta = \lambda_j - \lambda_k$, $i \neq k$) をとると、4.6.6 から、

$$[\hat{h}_\alpha(s), \hat{h}_\beta(t)] = \hat{h}_\alpha(s)(\hat{h}_\beta(t)\hat{h}_\alpha(s)h_\beta(t)^{-1})^{-1} = \hat{h}_\alpha(s)\hat{h}_\alpha(t^{-1})\hat{h}_\alpha(t^{-1}s)^{-1}$$
$$= c_\alpha(s, t^{-1})$$

一般に、$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$, ${}^ab = aba^{-1}$ に対して、$[ab, c] = {}^a[b,c]\cdot[a,c]$, $[a, bc] = [a,b]\cdot{}^b[a,c]$ であり、$c_\alpha(s,t)$ が中心の元であることから S1 が成立する。S2 の証明: t, $1-t \in R^*$ のとき、

$$\hat{h}_\alpha(t-t^2)\hat{h}_\alpha(1-t)^{-1} = \hat{w}_\alpha(t-t^2)\hat{w}_\alpha(1-t)^{-1} = \hat{w}_{-\alpha}((t^2-t)^{-1})\hat{w}_{-\alpha}((t-1)^{-1})^{-1}$$
$$= \hat{x}_{-\alpha}((t^2-t)^{-1})\hat{x}_\alpha(t-t^2)\hat{x}_{-\alpha}((t^2-t)^{-1})\hat{x}_{-\alpha}((1-t)^{-1})\hat{x}_\alpha(t-1)\hat{x}_\alpha((1-t)^{-1})$$
$$= \hat{x}_{-\alpha}((t^2-t)^{-1})\hat{x}_\alpha(-t^2)\hat{w}_\alpha(t)\hat{w}_\alpha(-1)\hat{x}_\alpha(1)\hat{x}_{-\alpha}(-t(t-1)^{-1})$$
$$= \hat{x}_{-\alpha}((t^2-t)^{-1})\hat{x}_\alpha(-t^2)\hat{x}_\alpha(t^2)\hat{x}_{-\alpha}(-(t^2-t)^{-1})\hat{h}_\alpha(t) = \hat{h}_\alpha(t)$$

S3の証明: $c_\alpha(t,-t^{-1}) = \hat{h}_\alpha(t)\hat{h}_\alpha(-t^{-1})\hat{h}_\alpha(-1)^{-1}$

$= \hat{w}_\alpha(t)\hat{w}_\alpha(-1)\hat{w}_\alpha(-t^{-1})\hat{w}_\alpha(-1)\hat{w}_\alpha(-1)^{-2} = \hat{w}_\alpha(t)\hat{w}_{-\alpha}(t^{-1}) = 1$

$\therefore$ $c_\alpha(t,-t)c_\alpha(t,-t^{-1}) = c_\alpha(t,1) = 1$ から、$c_\alpha(t,-t) = 1$

$c_\alpha = c_\beta$ $\forall \beta \in \Phi$ の証明: $c_\alpha(s,t) = c_{-\alpha}(t,s)^{-1}$. 同様に、

$\langle \alpha, \beta \rangle = \pm 1$ のとき、$c_\alpha(s,t) = c_\beta(t,s)^{-1} = c_\beta(s,t)$. (証了)

(5.3) <u>定理</u> $G = E(R)$ または $SL_n(R)$ (たゞし. $n>4$, Rは体)とし、Cを自明なG-加群とし、$S(R,C)$をR上のCに値をとつ Symbols の全体とする. (5.2) より.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(K_2(R), C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}(R), C) \\ \wr\! \mid & & \wr\! \mid \\ H^2(G,C) & \longrightarrow & S(R,C) \end{array}$$

このとき、

<u>定理</u> $G = SL_n(R)$ に対して、$H^2(G,C) \cong S(R,C)$

たゞし、$n>4$, Rは体とする.

(証明) mono であること: $H^2(G,C)$の1つの元をきめる 2-コサイクルを Zとし、これに対応する symbol を c_Zとする.
c_Zが自明な symbol なら. Zは $H_n(R)$上で分解する. $SL_n(R)$ $(n>4)$は生成元 $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$に対して. 関係 (A), (B) (cf. 4.1) と (c) $h_\alpha(s)h_\alpha(t) = h_\alpha(st)$, $\alpha \in \Phi$, $s,t \in R^*$ で定義されることから、Zは $SL_n(R)$上で分解する.

epi であること: 任意の $c \in S(R,C)$に対して. $c_Z = c$となる 2-コサイクル Zを実際に構成する. 大体の方針は. $SL_n(R)$の

Bruhat 分解をつかって、 c によってきまる拡大を $H_\alpha(R)$, $H_n(R)$, $N_n(R)$ から $SL_n(R)$ へ延長する. (cf. Matsumoto [4]).

(5.4) 系　R が体のとき、 $Sym(R) \cong K_2(R)$

(5.3) から、 $Hom(K_2(R), Sym(R)) \cong Hom(Sym(R), Sym(R))$

$1_{sym(R)}$ に対応する $\sigma : K_2(R) \longrightarrow Sym(R)$ をとれば (5.2) の写像の逆写像をあたえる。

(5.5) 体の元の位数 > 4 ならば、(5.3) は $n = 3, 4$ でも成立する. F が局所体のとき、Kubota [3] はノルム剰余記号を使って、 $SL_2(F)$ の位相群としての拡大を構成したが, (5.3) はその一般化になっている. $G = SL_2(F)$ のとき、(5.3) の対応は、次のように具体的にあたえられる. $\widetilde{G}$ を G の被覆群とし、これに対応する symbol を c とする. $u \in F$, $t \in F^*$ とし、

$$x(u) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad w(t) = \begin{pmatrix} & -t^{-1} \\ t & \end{pmatrix}, \quad h(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & \\ & t \end{pmatrix}$$

とおくと、任意の $g \in G$ は一意的に $g = x(u)w(t)x(u')$ または、 $g = x(u)h(t)$ とかける. これをつかって、次の2つの写像 χ, σ を定義する.

(5.5.1)　$\chi : G \longrightarrow F$,　$g \longmapsto t$

いいかえれば、 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、 $\chi(g) = c$ ($c \neq 0$ のとき), $= d$ ($c = 0$ のとき)

(5.5.2)　$\sigma : G \longrightarrow \widetilde{G}$

$$g \longmapsto \hat{x}(u)\hat{w}(t)\hat{x}(u') \text{ または } \hat{x}(u)\hat{h}(t)$$

ここで、$\hat{x}(u)$ は $x(u)$ の lifting で1つ固定し、$\hat{h}(t)$ は、(4.4.1), (4.4.2) と同じように定義する。このとき、

$$z_c(g, g') = \sigma(g)\sigma(g')\sigma(gg')^{-1}$$

とおくと、

(5.5.3) $\quad z_c(g,g') = c(\chi(g),\chi(g'))^{-1}c(\chi(gg'), -\chi(g)^{-1}\chi(g'))$

となる。とくに、$g=h(s)$, $g'=h(t)$ なら、$z_c(g,g')=c(s,t)$.

逆に、symbol c に対して、z_c を (5.5.3) で定義すると、G の被覆群 $\tilde{G}$ で、対応する symbol が c であるものがつくれる。(この場合、c は symbol よりも弱い条件をもつものでよい cf. (5.7))

(5.6) <u>定理</u> R が局所環で、剰余体の元の個数 >2 ならば

$$Sym(R) \longrightarrow K_2(R) \longrightarrow 0$$

(証明 cf. R. Stein[8]) m を R の極大イデアルとすると、

$$\begin{array}{ccc} Sym(R) & \xrightarrow{\varphi} & K_2(R) \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\tau \\ Sym(R/m) & \xrightarrow[\bar{\varphi}]{\sim} & K_2(R/m) \end{array}$$

で、$\bar{\varphi}\circ\sigma = \tau\circ\varphi$ が epi であることから、φ epi $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker}\tau \subset \varphi(Sym(R))$ となる。

$\hat{U}(R,m) = \hat{U}(R)\cap ST(R,m)$

$\hat{H}(R,m)$: $h_\alpha(t)$, $t\in 1+m$ から生成される $\hat{H}(R)$ の<u>正規</u>部分群

$D(R,m)$: $c_\alpha(s,t)$, $\alpha\in\Phi$, $s\in R^*$, $t\in 1+m$ から生成される

$\hat{H}(R)$ の正規部分群とする.

(5.6.1) $[\hat{H}(R),\ \hat{H}(R,m)] \subseteq K_2(R) \cap \hat{H}(R,m) \subset D(R,m)$

(5.6.2) $ST(R,m) = \hat{U}(R,m)\hat{H}(R,m)\hat{U}(R,m)$

が成立し、この等式から、

$$K_2(R) \cap ST(R,m) = D(R,m) \subset \varphi(Sym(R))$$

が示される.

(5.7) 注意 (5.6)で $Sym(R) \longrightarrow K_2(R)$ が同型かどうかは、わかっていない. (5.3)は単連結, 単純 Chevalley 群に一般化されている. Sp_{2n} ($n \geqq 1$, $n=1$ のときは $=SL_2$) のときは、Steinberg コサイクルは bi-multiplicative でなくともよく、Rが体のとき、Symbol の條件より弱い次の條件で特徴づけられる。(cf. C. Moore [5], H. Matsumoto [4])

(S′1) $(a,b)(ab,c) = (a,bc)(b,c)$, $(a,1) = (1,b) = 1$

(S′2) $(a,b) = (a^{-1}, b^{-1})$

(S′3) $(a, (1-a)b) = (a,b)$

追記 Fを数体とし、Aをそのアデール環, Gを rank > 1 の単連結, 単純 Chevalley 群とする. (1.4)の結果と、(5.3)により、相対基本群 $\pi_1(G(A), G(F))$ を決定することができ、これは、Gに関する合同部分群の問題の解決に応用された. (cf. H. Matsumoto [4]) これらの結果はさらに、一般の群

に拡張されるかも知れない。このためには、より一般の群について、被覆群の考察をしている次の論文などの議論をさらに精密化する必要がある。

C. W. Curtis: Central extensions of groups of Lie types,
J. Reine Angew. Math. 220 (1965) pp. 174–185

J. Grover: Covering groups of groups of Lie types,
Pacific J. Math. vol. 30, no. 3 (1969) pp. 645–655

Global field の K_2 については、Bass [2] に Bass-Tate の結果の部分的な紹介がある。Bass [1] §IV の Dedekind 環でのある種の相互法則は K_2-関手でよりよく理解される。

References

[1] H. Bass : Algebraic K-theory, Benjamin, 1968

[2] H. Bass : K_2 and symbols, Lecture notes in Mathematics 108(1969) Algebraic K-theory and its geometric applications, pp.1-11

[3] T. Kubota : Topological covering of SL_2 over a local field, J. Math. Soc. Japan, Vol. 19 (1967) pp.114-121

[4] H. Matsumoto : Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4éme serie tome 2 (1969) pp. 1-62

[5] C. Moore : Group extensions of p-adic and adélic linear groups, Pub. Math. I.H.E.S. No. 39 (1969) pp.5-74

[6] G.Hochschild & J.P.Serre : Cohomology of group extensions, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953) pp. 110-134

[7] A. Shapiro : Group extensions of compact Lie groups, Ann. of Math. 50 (1949) pp. 581-586

[8] M. Stein : Central extension of Chevalley groups over commutative rings, Thésis, Columbia Univ. (1970)

[9] R. Steinberg : Génerateure, relations et revêtements de groupes algébriques, Colloques Buxelles (1962) pp.113-127

[10] R.G. Swan : Algebraic K-theory, Lecture notes in Math. 76 (1968) Springer

[11] R.G.Swan : Non abelian homological algebra and K-theory, Proc. Sym. Pure Math. Vol. 17 (1970) pp.88-123